

Chapitre 10 : Produit scalaire

I. Produit Scalaire

1) Définitions

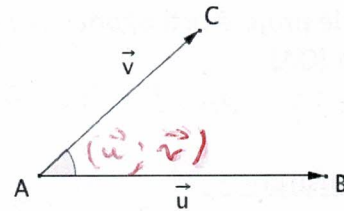
Définition : Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

La **norme du vecteur** $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$



Remarque : $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit " $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ".

Exemple :

Soient A, B et C trois points distincts tels que $AB = 2$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 2 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -5 \end{aligned}$$

2) Vecteurs colinéaires

Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et colinéaires.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

En particulier $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Démonstration :

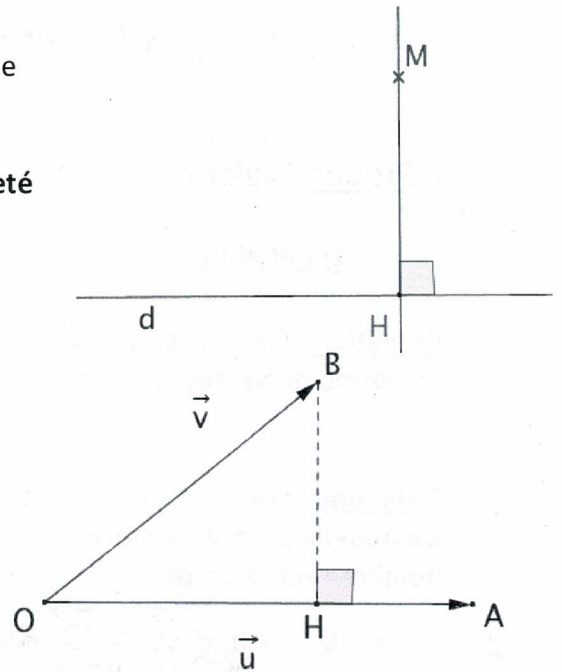
• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire, donc $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\pi) \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times (-1) \\ &= -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \end{aligned}$$

3) Vecteurs orthogonaux, projeté orthogonal

Définition : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit orthogonaux lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Définition : Soit une droite d et un point M du plan. Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M .



Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) .

On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}) \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB} \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} + OA \times HB \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} \end{aligned}$$

Propriété :

Soient A , B et C trois points distincts.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

Exemple :

Soit un carré $ABCD$ de côté c .

Calculer, en fonction de c , les produits scalaires :

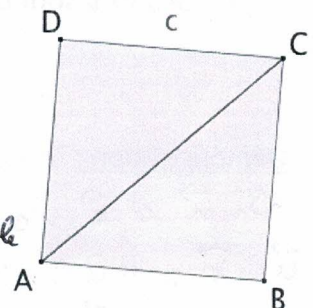
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ car B est le projeté orthogonal de C sur (AB)

$$= AB \times AB = c^2$$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ car $(AB) \perp (AD)$

c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$ car ils sont colinéaires de sens opposés.



II. Propriétés du produit scalaire

1) Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

Propriété de symétrie :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

On dit que le produit scalaire est *symétrique*.

Démonstration :

On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans le cas contraire).

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{u} &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v}, \vec{u}) \\ &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{u}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

Propriétés de bilinéarité :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et $k \in \mathbb{R}$ on a :

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \vec{u} \cdot \vec{v}$

Remarque :

Par symétrie, le produit scalaire est aussi linéaire à gauche. On dit qu'il est *bilinéaire*.

2) Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$. On a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
- $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$

Exemple :

Soit $\vec{u}(3; -4)$ et $\vec{v}(-3; 7)$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= xx' + yy' \\ &= 3 \times -3 + -4 \times 7 \\ &= -9 - 28 \\ &= -37\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{3^2 + (-4)^2} \\ &= 5\end{aligned}$$

3) Produit scalaire et normes

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Démonstration pour la deuxième formule :

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \quad \text{car le produit scalaire est symétrique}$$

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$



$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD} \quad \text{et} \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \textcircled{2}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\vec{BC} - \vec{BA} = \vec{AC}$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = \textcircled{1}$$

Démonstration de la première formule :

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Exemple :

On considère la figure ci-contre, calculer le produit scalaire

$$\vec{CG} \cdot \vec{CF}$$

$$\text{on } \vec{u} = \vec{CG} \text{ et } \vec{v} = \vec{CF}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{CG} - \vec{CF}$$

$$= \vec{CG} + \vec{FC}$$

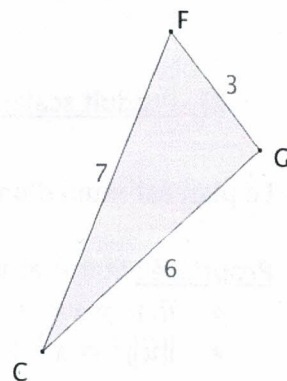
$$= \vec{FG} + \vec{CG}$$

$$= \vec{FG} \quad \text{par la relation de Choles.}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$= \frac{1}{2} (CG^2 + CF^2 - FG^2)$$

$$= \frac{1}{2} (36 + 49 - 9) = 38$$



~~même point de départ $\rightarrow \vec{CG} \cdot \vec{CF}$ dans $\vec{u} + \vec{v}$
point de départ différent $\rightarrow \vec{CG} \cdot \vec{CF}$ dans $\vec{u} - \vec{v}$~~